Межрегиональная олимпиада школьников 2024/2025

«Будущие исследователи – будущее науки»

ОТБОРОЧНЫЙ ТУР

МАТЕМАТИКА

7 класс

1. Решите уравнение: $(2x-1)(x+1)-(x-1)(x+1)=x^2$

2. Внутри треугольника ABC произвольным образом отмечена точка X. Докажите, что угол AXB больше угла ACB.

3. Среди прямых на плоскости, заданных уравнениями 1-6, укажите пары параллельных прямых. 1) $y=x+1$, 2) $2y=3x+4$, 3) $\frac{y}{2}+1=\frac{x}{5}$, 4) $\frac{x}{2}+1=\frac{y}{5}$, 5) $x=2y/3+10$, 6) $\frac{y-x}{2}=3$.

4. У мальчика столько же сестер, сколько и братьев. У его сестры вдвое меньше сестер, чем братьев. Сколько в этой семье сестер и сколько братьев?

5. Пароход идет из Нижнего Новгорода в Астрахань 5 суток, а обратно – 7 суток. Сколько времени плывут плоты из Нижнего Новгорода в Астрахань?

6. Постройте график функции $y=\frac{2x^2+2x}{x+1}+1$.

7. Решите уравнение: $(x^2+1)^2=(x^2-1)(x^2+1)+(x+1)^2-4x+1$

8. В треугольнике ABC сторона AC=15см. Точка касания вписанной в треугольник окружности делит сторону AB пропорционально числам 2 и 1, начиная от вершины A. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 42см.

9. К числу 43 справа и слева припишите по одной цифре так, чтобы вновь полученное число делилось на 45. Рассмотрите все возможные варианты.

10. Пусть x<y<z – произвольные натуральные числа. Найдется ли хотя бы одна пара чисел, разность которых делится на 2?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Всего
10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	100

Межрегиональная олимпиада школьников 2024/2025

«Будущие исследователи – будущее науки»

ОТБОРОЧНЫЙ ТУР

МАТЕМАТИКА

8 класс

1. Можно ли от куска материи длиной в 2/3 метра отрезать полметра, не имея под рукой метра?

2. Докажите, что разность двух трехзначных чисел, из которых одно написано теми же цифрами, но в обратном порядке, делится на 99.

3. Докажите, что произведение четырех последовательных натуральных чисел, сложенное с единицей, есть полный квадрат.

4. Докажите, что $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=9$

5. a, b, c – такие числа, что $a + b + c = 0$. Докажите, что $ab + bc + ca \leq 0$.

6. Как разделить треугольник с углами 15°, 105°, 60° на три равнобедренных треугольника?

7. Выпуклый многоугольник Г лежит внутри выпуклого многоугольника Г′. Докажите, что периметр Г не превосходит периметра Г′.

8. Могут ли расстояния от точки M до вершин квадрата равняться соответственно 1, 4, 7, 8?

9. Докажите, что ни при каком натуральном k число 2^k+1 не делится на 7.

10. Пусть $k<l<m<n$ – произвольные натуральные числа. Найдется ли хотя бы одна пара чисел, разность которых делится на 3?

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**Всего**
10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	100

Межрегиональная олимпиада школьников 2024/2025

«Будущие исследователи – будущее науки»

ОТБОРОЧНЫЙ ТУР

МАТЕМАТИКА

9 класс

1. Сколько различных натуральных чисел надо выписать на доске, чтобы среди них наверняка нашлась хотя бы одна пара чисел, разность которых делится на 10?

2. Решите уравнение $1+\sqrt{1+x\sqrt{2x^2+4x}}=x$.

3. В ΔABC: $AB=34$, $AC=32$, медиана $AM=17$. Найдите площадь S_{ABC}.

4. Докажите, что $\left|\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}\right|+\left|\frac{x+y}{2}+\sqrt{xy}\right|=|x|+|y|$ для любых действительных x и y имеющих одинаковые знаки.

5. Цена бриллианта пропорциональна квадрату его веса. Бриллиант весом в p карат (1 карат = 0,2 г) был разбит на две части, после чего его стоимость уменьшилась в k раз. Найдите вес частей, на которые был разбит бриллиант.

6. Имеется два сплава из цинка, меди и олова. Первый содержит 25% цинка, второй – 50% меди. Процентное содержание олова в первом сплаве в два раза больше, чем во втором. Сплав 200 *кг* первого и 300*кг* второго, получили сплав, где 28% олова. Сколько *кг* меди в этом новом сплаве?

7. Найдите x и y, чтобы выполнялось $x^2+12xy+12y^2-8y+1=0$.

8. В уравнении $x^4+ax^3+bx^2+6x+2=0$ один из корней равен $\sqrt{3}+1$. Найдите остальные корни уравнения, если a и b – рациональные числа.

9. Докажите, что $(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n)\geq 2$"если $a_1, a_2, \ldots, a_n$– положительные числа и $a_1a_2\ldots a_n=1$

10. Найдите сумму $S=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Всего
10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	100

	Межрегиональная олимпиада школьников 2024/2025 «Будущие исследователи – будущее науки» **ОТБОРОЧНЫЙ ТУР** **МАТЕМАТИКА**

10 класс

1. Решите неравенство

$$[x]\{x\}+1<x,$$

где $[x]$ — целая часть, а $\{x\}$ — дробная часть числа x.

2. Определите количество делителей натурального числа 2025^{2025}, кратных числу 675.

3. Найдите все пары целых чисел x и y, удовлетворяющие уравнению

$$6x^2+17xy+12y^2+16x+21y-13=0$$

4. Найдите многочлен минимальной степени с целыми коэффициентами, одним из корней которого является число $\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

5. Первый пешеход вышел из пункта A в пункт B. Не позже чем через сорок минут вслед за ним вышел второй пешеход. Места назначения они достигли с разницей во времени не менее одного часа. Если бы они вышли одновременно, то разница во времени прибытия составила бы не более двадцати минут. Известно, что скорость одного из них в полтора раза больше скорости другого. Определите, сколько времени требуется каждому пешеходу на путь от A до B.

6. Вычислите значение выражения

$$\cos^2\left(arctg(3)-arcctg\left(-\frac{1}{2}\right)\right).$$

7. При наборе слова ОЛИМПИАДА в результате небрежности мог быть нарушен порядок букв. Найдите вероятность того, что сохранится хотя бы порядок гласных (их позиции — необязательно).

8. В квадрат со стороной a вписана окружность ω_1. Найдите радиус окружности ω_2, вписанной в один из углов квадрата и касающейся окружности ω_1 внешним образом.

9. Построить множество точек плоскости (x, y), удовлетворяющих уравнению

$$2|3-|x||+5||y|-2|=20.$$

10. При каком значении параметра p уравнение

$$\sqrt{3}\sin\left(2^{2x+1-x^2}\right)=2\cos^2\left(2^{2x-x^2}\right)-p$$

имеет хотя бы одно решение?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Всего
10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	100

	Межрегиональная олимпиада школьников 2024/2025 «Будущие исследователи – будущее науки» **ОТБОРОЧНЫЙ ТУР** **МАТЕМАТИКА**

11 класс

1. Решите неравенство

$$[x]\{x\}+1 < x,$$

где $[x]$ — целая часть, а $\{x\}$ — дробная часть числа x.

2. Определите количество делителей натурального числа 2025^{2025}, кратных числу 675.

3. Найдите все пары целых чисел x и y, удовлетворяющие уравнению

$$6x^2+17xy+12y^2+16x+21y-13=0$$

4. Вычислите сумму всех членов последовательности

$$\frac{3}{3}, -\frac{7}{9}, \frac{11}{27}, -\frac{15}{81}, \frac{19}{243}, \ldots$$

5. Вычислите значение выражения

$$\cos^2\left(arctg(3) - arcctg\left(-\frac{1}{2}\right)\right).$$

6. При каком значении параметра p уравнение имеет два решения?

$$\left|\frac{x+1}{3x-1}\right| + |x| = p$$

7. При наборе слова ОЛИМПИАДА в результате небрежности мог быть нарушен порядок букв. Найдите вероятность того, что сохранится хотя бы порядок гласных (их позиции — необязательно).

8. В прямоугольник со сторонами a и b вписан эллипс. Найдите радиус окружности, вписанной в один из углов прямоугольника и касающейся эллипса внешним образом.

9. Построить множество точек плоскости (x, y), удовлетворяющих уравнению

$$4\sqrt{3}\,|y| + 6|x| + 6\left|x - \frac{1}{2}\right| = 9.$$

10. При каком значении параметра p неравенство имеет хотя бы одно решение?

$$arc\cos(\mathrm{px}+1-\mathrm{p}) + \arcsin(2x+p-3) \le \frac{\pi}{2}$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Всего
10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	100