



Межрегиональная олимпиада школьников 2017/2018  
«Будущие исследователи – будущее науки»  
**ОТБОРОЧНЫЙ ТУР**  
**МАТЕМАТИКА**



**7 класс.**

**Задача 1.**

Решить уравнение:  $x^2 - x - 4 + \frac{(x+2)^2}{x+2} = 2$ .

**Задача 2.**

Найти значение выражения  $\frac{4x+3y}{12} - 5(-y/3 - 0.25x) + 12(\frac{y}{12} + \frac{x}{6})$  при  $x = -1$ ,  
 $y = 1$ .

**Задача 3.**

Число  $y$  - квадрат двузначного числа  $x$ . Найти  $x$  и  $y$ , если известно, что суммы цифр в их записи одинаковы.

**Задача 4.**

Точка  $M$  лежит внутри острого угла  $U$ . Как провести прямую через точку  $M$ , чтобы  $M$  делила пополам отрезок прямой между сторонами угла?

**Задача 5.**

Собственная скорость лодки (в стоячей воде) – 3 км/ч, а скорость течения – 1 км/ч. Какова средняя скорость лодки по речному пути из некоторого пункта  $A$  в пункт  $B$  и обратно?

**Задача 6.**

Решить в натуральных числах уравнение:  $(a+b)^2 - 2\frac{a^3-b^3}{a-b} = 2a^2 + 3$ .

**Задача 7.**

График функции отсекает от третьей координатной четверти равнобедренный прямоугольный треугольник с длинами катетов, равными 3. Найдите эту функцию.

**Задача 8.**

Банк «БИТ» меняет рубли на биткойны по 3000 рублей за биткойн и еще берет 7000 рублей за право обмена независимо от меняемой суммы. Банк «БАТ» берет за 1 биткойн 3020 рублей, а за право обмена берет 1 биткойн (тоже независимо от меняемой суммы). Какую сумму собирается менять финансист, если он выяснил, что ему все равно, в каком из банков менять деньги?

### Задача 9.

В прямоугольном треугольнике ABC сторона AB - гипотенуза. На прямой AB по обе стороны от гипотенузы (т.е., вне треугольника ABC) отложены отрезки  $AN = AC$  и  $BM = BC$ . Найдите угол NCM.

### Задача 10.

Последовательность чисел строится по следующему закону. На первом месте стоит число 7, далее за каждым числом стоит сумма цифр его квадрата, увеличенная на 1. Какое число стоит на 2017 месте?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Итого
5	5	5	10	10	10	10	10	15	20	100



Межрегиональная олимпиада школьников 2017/2018  
«Будущие исследователи – будущее науки»  
**ОТБОРОЧНЫЙ ТУР**  
**МАТЕМАТИКА**



**8 класс.**

**Задача 1.**

Пусть выражение  $a*b$  обозначает сумму цифр в произведении  $ab$ . Найти значение выражения  $(7*12)*(10*15)$ .

**Задача 2.**

Решить уравнение:  $x^2 - x - 4 + \frac{(x+2)^2}{x+2} = 2$ .

**Задача 3.**

Число  $y$  - квадрат двузначного числа  $x$ . Найти  $x$  и  $y$ , если известно, что суммы цифр в их записи одинаковы

**Задача 4.**

Стороны треугольника равны  $a, b$  и  $c$ , угол  $A = 60^\circ$ . Доказать, что  $3/(a+b+c) = 1/(a+b) + 1/(a+c)$ .

**Задача 5.**

Какова собственная скорость лодки (в стоячей воде), если скорость течения – 1 км/ч, а средняя скорость лодки по речному пути из некоторого пункта  $A$  в пункт  $B$  и обратно -  $8/3$  км/ч?

**Задача 6.**

В трех кучках лежат соответственно 12, 24 и 19 спичек. За ход можно переложить спичку из одной кучки в другую. За какое наименьшее число ходов можно получить три кучки с 8, 21 и 26 спичками?

**Задача 7.**

Выпуклый многоугольник  $\Gamma$  лежит внутри выпуклого многоугольника  $\Gamma'$ . Доказать, что периметр  $\Gamma$  не превосходит периметра  $\Gamma'$ .

**Задача 8.**

Решить уравнение:  $|x^2 - 9| + |x^4 + 25| = |x^2 - 25| + |x^4 + 9|$ .

**Задача 9.**

Найдите все натуральные числа  $n$  и  $m$ , которые являются решениями уравнения  $5^n - 5^m = 600$ .

### Задача 10.

Последовательность строится по следующему закону. На первом месте стоит число 7, далее за каждым числом стоит сумма цифр его квадрата, увеличенная на 1. Какое число стоит на 2017 месте?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Итого
5	5	5	10	10	10	10	15	15	15	100



Межрегиональная олимпиада школьников  
2017/2018  
«Будущие исследователи – будущее науки»  
**ОТБОРОЧНЫЙ ТУР**  
**МАТЕМАТИКА**



**9 класс.**

**Задача 1.**

В пустой на 30% бочке содержится на 30 литров больше, чем в такой же бочке, но на 30% заполненной. Каков объем бочки (в литрах)?

**Задача 2.**

Вычислить  $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2024}+\sqrt{2025}}$ .

**Задача 3.**

Дана последовательность из 6 чисел. Известно, что каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих. Сумма всех чисел равна 7996. Каково пятое число?

**Задача 4.**

При каком значении параметра  $a$  множество значений функции  $f(x) = a\sqrt{4x - x^2} + 21$  есть отрезок длины 10?

**Задача 5.**

Какой цифрой оканчивается число  $2017^{2017} - 2017$ ?

**Задача 6.**

Стороны треугольника  $a, b$  и  $c$ . Угол  $A=60^\circ$ . Доказать, что  $3/(a+b+c) = 1/(a+b) + 1/(a+c)$ .

**Задача 7.**

В трапеции угол между диагоналями равен  $60^\circ$  градусов, а длина одной из диагоналей равна сумме длин оснований трапеции. Доказать, что трапеция равнобедренная.

**Задача 8.**

Решить уравнение:  $x^2 + 2x + 2\sqrt{x^2 + 2x + 2} = 1$ .

**Задача 9.**

Решить уравнение:  $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a) = 360a^4$ .

**Задача 10.**

10. По определению  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ . Какой сомножитель нужно вычеркнуть из произведения  $1! \cdot 2! \cdot \dots \cdot 20!$ , чтобы оставшееся произведение стало квадратом некоторого натурального числа?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Итого
5	5	5	5	10	10	10	15	15	20	100



Межрегиональная олимпиада школьников 2017/2018

«Будущие исследователи – будущее науки»

**ОТБОРОЧНЫЙ ТУР  
МАТЕМАТИКА**



**10 класс.**

**Задача 1.**

При каком целом значении  $a$  уравнения  $3x^2 - 4x + a - 2 = 0$  и  $x^2 - 2ax + 5 = 0$  имеют общий корень. Найдите этот корень.

**Задача 2.**

Решите уравнение:  $\sqrt[4]{x+8} - \sqrt[4]{x-8} = 2$ .

**Задача 3.**

Найдите наибольшее значение выражения  $\frac{1}{\sin^6 x + \cos^6 x}$  при  $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ .

**Задача 4.**

Найдите сумму:  $1 \cdot 3 + 3 \cdot 9 + 5 \cdot 27 + \dots + (2n-1) \cdot 3^n$ .

**Задача 5.**

В командном турнире по шахматам встречаются две команды по 8 человек. Участники партий и цвет фигур в каждой из партий определяются жеребьевкой. Каково число различных исходов жеребьевки?

**Задача 6.**

Натуральные числа  $b_1, b_2, b_3$  образуют возрастающую геометрическую прогрессию с целым знаменателем. Число 2240 делится без остатка на  $b_2$ , а число 4312 на  $b_3$ . Найдите числа  $b_1, b_2, b_3$ , если известно, что при указанных условиях их сумма максимальна.

**Задача 7.**

На прямой  $2x - 3y = 6$  найдите точку, через которую проходят две перпендикулярные друг другу касательные к графику функции  $y = \frac{x^2}{4}$ .

**Задача 8.**

Треугольник  $CDE$  равнобедренный,  $\angle CDE = \arccos \frac{7}{9}$ ,  $CE = 10$ . В треугольнике расположены две окружности, причем радиус одной окружности в два раза больше радиуса другой. Окружности касаются друг друга внешним образом, и каждая касается основания  $CE$  и боковой стороны. Найдите радиусы этих окружностей.

### Задача 9.

В равнобедренный треугольник с длинами сторон 15,15 и 18 см вписан параллелограмм наибольшей площади так, что угол при основании у них общий. Найдите длину большей стороны параллелограмма.

### Задача 10.

Найдите все значения параметра  $a$ , при которых множество решений неравенства  $x(x - 2a + 4) < 8a - a^2 - \frac{4a^2}{x}$  не содержит никакого отрезка длиной 3, но при этом содержит какой-нибудь отрезок длиной 2.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Итого
5	5	10	10	10	10	10	10	15	15	100





Межрегиональная олимпиада школьников 2017/2018  
«Будущие исследователи – будущее науки»  
**ОТБОРОЧНЫЙ ТУР**  
**МАТЕМАТИКА**



**11 класс.**

**Задача 1.**

Составьте уравнение с целыми коэффициентами наиболее низкой степени, одним из корней которого является число:  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ .

**Задача 2.**

Решите уравнение:  $\log_p x + \log_{\sqrt{p}} x + \dots + \log_{\sqrt[p]{p}} x = \frac{p+1}{2}$ ,  $p \in \mathbb{N}$ .

**Задача 3.**

Решите уравнение:  $(2 + \sqrt{3})^{x^2 - 2x + 1} + (2 - \sqrt{3})^{x^2 - 2x - 1} = \frac{4}{2 - \sqrt{3}}$ .

**Задача 4.**

Решите уравнение:  $\frac{1 - \cos 2x + \dots + (-1)^n \cos^n 2x + \dots}{1 + \cos 2x + \dots + \cos^n 2x + \dots} = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^4 x$ .

**Задача 5.**

Первый пешеход вышел из пункта  $A$  в пункт  $B$ . Не позже чем через *сорок* минут вслед за ним вышел второй пешеход. Места назначения они достигли с разницей во времени *не менее одного часа*. Если бы они вышли одновременно, то разница во времени прибытия составила бы *не более двадцати минут*. Известно, что скорость одного из них *в полтора раза* больше скорости другого. Определите, сколько времени требуется каждому пешеходу на путь от  $A$  до  $B$ .

**Задача 6.**

По прогнозам аналитиков цены на смартфоны китайского бренда Xiaomi в 2018 году упадут в рублях РФ в среднем на 20%, а в долларах США на 40%. В то же время прогнозируется снижение цены iPhone X на 10% в рублях РФ. На сколько процентов упадут цены на iPhone X в долларах США?

**Задача 7.**

Боковые стороны и меньшее основание трапеции имеют одинаковые длины – по 50 см. Каким должно быть большее основание, чтобы площадь трапеции была наибольшей?

### Задача 8.

Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение имеет единственный корень:  $3^{x+1} \cdot (3^{2x+1} - 2 \cdot 3^{x+1}) + 9p = 5 - 3^{x+2}$ .

### Задача 9.

В конус вписан шар, а к шару проведена касательная плоскость, параллельно плоскости основания конуса. В каком отношении, считая от вершины, эта плоскость делит боковую поверхность конуса, если косинус угла между образующей и плоскостью основания равен  $\frac{1}{3}$ ?

### Задача 10.

Найдите все значения параметра  $a \geq 4$ , при которых в области определения функции  $y = \ln(3 \log_x(a + 4\sqrt{a-4}) + 1 - 2 \log_{2+\sqrt{a-4}} x)$  нет натуральных чисел, кратных пяти.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Итого
5	5	10	10	10	10	10	15	10	15	100